سینماتیک

مدرس:مسعود رهنمون

حرکت سقوط آزاد:

به حرکتی گفته می شود که در راستای قائم صورت می گیرد و در آن تنها نیروی جاذبه ی زمین دخالت دارد. این حرکت در نزدیکی سطح زمین، با چشم پوشی از مقاومت هوا، یک حرکت **شتاب دار با شتاب ثابت** است که شتاب آن، **شتاب گرانشی** نامیده می شود. شتاب گرانشی را با حرف g نشان می دهیم. اگر جهت مثبت محور y را به سمت بالا در نظر بگیریم، از آنجا که شتاب گرانشی همواره رو به پایین است، خواهیم داشت:

$$v = -gt + v_0 \quad (۱)$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 \quad (۲)$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t \quad (۳)$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \quad (۴)$$

$$\bar{v} = \frac{(v_1+v_2)}{2} \quad (۵)$$

$$\Delta y = -g\left(n - \frac{1}{2}\right) + v_0 \quad (۶)$$

$$\Delta y = -g\left(n - \frac{1}{2}\right)T^2 + v_0T \quad (۷)$$

نکته ۱: اگر جسم به طرف بالا پرتاب شده باشد علامت v_0 مثبت می شود و اگر جسم به طرف پایین پرتاب شده باشد علامت آن منفی می شود.

نکته ۲ : در جابجایی رو به بالا، علامت Δy مثبت و در جابجایی رو به پایین منفی می شود.

نکته ۳ : در بحث سقوط آزاد، رسم شکل و در نظر گرفتن یک مبدأ و ثابت بودن آن در هنگام حل مسئله بیشتر از مباحث قبل خودنمایی می کند.

نکته ۴ : اگر جسمی را به طرف بالا پرتاب کنیم، زمان رسیدن به اوج و ارتفاع اوج آن از رابطه های زیر محاسبه می شود:

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \quad (۸)$$

$$t = \frac{v_0}{g} \quad (۹)$$

نکته ۵ : اگر جسمی را از ارتفاع h بدون سرعت اولیه رها کنیم، زمان رسیدن به سطح زمین و بزرگی سرعت آن هنگام رسیدن به سطح زمین از رابطه های زیر بدست می آید:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (۱۰)$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad (۱۱)$$

نکته ۶ : در حرکت پرتاب رو به بالا مدت زمان رفت و برگشت با هم برابر است. همچنین بزرگی سرعت جسم هنگام عبور از یک نقطه رو به بالا و پایین با هم برابر است ولی جهت آن متفاوت است.

مثال ۱

از بالای صخره ای به ارتفاع ۸۰ متر جسمی را رها می کنیم. مطلوب است:

الف) مدت زمان سقوط تا رسیدن جسم به سطح زمین

ب) سرعت جسم هنگام برخورد به سطح زمین

پاسخ الف:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{16} = 4\ s$$

پاسخ ب:

$$v = -\sqrt{2gh} = -40\ \frac{m}{s}$$

نکته ۷ : علامت منفی نشانگر رو به پایین بودن سرعت است.

مثال ۲

اگر در مثال قبل جسم را با سرعت ۳۰ متر بر ثانیه رو به پایین پرتاب می کردیم، چه تغییری در نتایج حاصل پیش می آمد؟

پاسخ الف:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + v_{\circ}t + y_{\circ} \Longrightarrow ۰ = -\frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times t^{۲} - ۳۰ \times t + ۸۰ \Longrightarrow t = \begin{cases} -۸ \\ ۲ \end{cases} s$$

با توجه به مثبت بودن زمان، پاسخ ۲ ثانیه صحیح است.

پاسخ ب:

$$v = -gt + v_{\circ} \Longrightarrow v = -۱۰ \times ۲ - ۳۰ = -۵۰\ \frac{m}{s}$$

مثال ۳

سنگی را از سطح زمین به سمت بالا پرتاب می کنیم. اگر این سنگ بعد از ۴ ثانیه به زمین برگردد، مطلوب است:

a) سرعت اولیه ی پرتاب.

b) ارتفاع نقطه ی اوج.

c) زمان رسیدن به نقطه ی اوج.

پاسخ:

ابتدا پاسخ قسمت ***c*** را محاسبه می کنیم: زمان رفت و برگشت دو برابر زمان رسیدن به اوج است.

$$t = \frac{t}{2} = 2s$$

بخش a:

$$t = \frac{v_{\circ}}{g} \Longrightarrow v_{\circ} = 20\ \frac{m}{s}$$

بخش b:

$H=\frac{v_\circ^2}{2g}=\frac{400}{20}=20\ m$

مثال ۴

سنگی ازلبه یک بلندی رها می شود.اگر زمان رسیدن سنگ به زمین t باشد،زمان رسیدن سنگ به نیمه راه رابدست آورید.

پاسخ:

$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$t'=\sqrt{\frac{2\frac{h}{2}}{g}}=\sqrt{\frac{h}{g}}$

$t'=\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}t$

نکته ۸ : اگر جسمی از ارتفاع h بدون سرعت اولیه رها شود، زمان رسیدن به $\frac{1}{n}$ مسیر، $\frac{\sqrt{n}}{n}$ کل زمان حرکت است.

مثال ۵

آسانسوری با شتاب روبه بالای۴ متربرمجذورثانیه شروع به حرکت می کند. درلحظه ای که سرعت رو به بالای آن۱متربرثانیه است، پیچی از سقف آسانسورکه ۲/۵ متربالاتر از کف آن است، می افتد. مطلوبست زمان حرکت پیچ تا رسیدن به کف آسانسور.

پاسخ:

حرکت آسانسور شتاب دار با شتاب ثابت و حرکت پیچ سقوط آزاد است. معادله ی حرکت آنها را نوشته و مساوی هم قرار می دهیم.

$y=\frac{1}{2}at^2+v_\circ t+y_\circ \Longrightarrow y=2t^2+t$

$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_\circ t+y_\circ \Longrightarrow y=-5t^2+t+2.5$

$2t^2+t=-5t^2+t+2.5 \Longrightarrow 7t^2=2.5 \Longrightarrow t\cong 0.6\ s$

مثال ۶

سنگی را از لبه ی بالای ساختمانی به ارتفاع ۶۰ متر در شرایط خلأ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می کنیم. سنگ پس از ۶ ثانیه به زمین برخورد می کند. سرعت سنگ هنگام برخورد به زمین چقدر است؟

پاسخ:

سنگ وقتی به زمین می رسد، نسبت به نقطه ی پرتاب ۶۰ متر پایین آمده است.

$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2+v_\circ t \Longrightarrow -60=-5\times 36+6v_\circ \Longrightarrow v_\circ=20\frac{m}{s}$

$v=-gt+v_\circ \Longrightarrow v=-60+20=-40\ \frac{m}{s}$

مثال ۷

گلوله ای را از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین با سرعت اولیه ی $V_\circ$ در راستای قائم رو به بالا پرتاب می کنیم. در ارتفاع ۶۵ متری سطح زمین سرعت گلوله به صفر می رسد. سرعت اولیه را محاسبه کنید.

پاسخ:

وقتی سرعت به صفر می رسد، پرتابه به نقطه ی اوج رسیده است.

$H=\frac{v_\circ^2}{2g}\Longrightarrow 45=\frac{v_\circ^2}{20}\Longrightarrow v_\circ=30\ \frac{m}{s}$

مثال ۸

گلوله ای در شرایط خلأ از ارتفاع h رها می شود و در لحظه ای که به ۵۰ متری سطح زمین می رسد، سرعتش ۱۵ متر بر ثانیه می شود. این گلوله چند ثانیه پس از رها شدن به زمین می رسد؟

پاسخ:

$$v^2 - v_0^2 = -2g\,\Delta y \Longrightarrow 225 = -20\,\Delta y \Longrightarrow \Delta y = -11.25\,m$$
$$\Delta y = -5t^2 \Longrightarrow -61.25 = -5t^2 \Longrightarrow t = 3.5\,s$$

مثال ۹

گلوله ای در شرایط خلأ از ارتفاع ۱۰۰ متری به طور قائم رو به بالا پرتاب می شود و پس از مدتی به زمین می رسد. اگر زمان پایین آمدن گلوله ۱/۵ برابر زمان بالا رفتن گلوله باشد، بیشترین فاصله ی گلوله از سطح زمین چند متر است؟

پاسخ:

فاصله ی نقطه ی اوج تا نقطه ی پرتاب را با H نشان می دهیم. زمان بالا رفتن گلوله تا اوج برابر است با زمان پایین آمدن از اوج تا محل پرتاب. اگر زمان رسیدن گلوله از اوج تا نقطه ی پرتاب را با t نشان دهیم:

$$H = 5t^2$$
$$H + 100 = 5(1.5t)^2 \Longrightarrow H = 11.25t^2 - 100$$
$$\Longrightarrow 100 = 6.25t^2 \Longrightarrow t^2 = \frac{100}{6.25} \Longrightarrow H = 5\frac{100}{6.25} = 80\,m$$
$$80 + 100 = 180\,m$$

مثال ۱۰

جسم A از ارتفاع ۲۵ متری بالای سطح زمین با سرعت اولیه ی ۲۰ متر بر ثانیه در راستای قائم رو به بالا پرتاب می شود. هم زمان جسم B نیز از همان نقطه و با همان سرعت اولیه به سمت پایین پرتاب می شود. ۰/۸ ثانیه پس از لحظه ی پرتاب، فاصله ی بین دو جسم چند متر می شود؟

پاسخ:

مکان دو جسم را حساب می کنیم و از هم کم می کنیم.

$$y_1 = -5t^2 + 20t + 25 \Longrightarrow y_1 = -5 \times 0.64 + 16 + 25 = 37.8\,m$$
$$y_2 = -5t^2 - 20t + 25 \Longrightarrow y_2 = -5 \times 0.64 - 16 + 25 = 5.8\,m$$
$$37.8 - 5.8 = 32\,m$$

مثال ۱۱

گلوله ای در شرایط خلأ بدون سرعت اولیه از ارتفاع کافی سقوط می کند. نسبت مسافت طی شده در نیم ثانیه ی اول به مسافت طی شده در ثانیه ی دوم چقدر است؟

پاسخ:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 = -5 \times 0.25 = -1.25\,m$$
$$\Delta y = -g\left(n - \frac{1}{2}\right) = -10 \times 1.5 = -15\,m$$
$$\frac{1.25}{15} = 0.083$$

مثال ۱۲

در شرایط خلأ گلوله ی کوچکی را از ارتفاع ۴۵ متری سطح زمین رها می کنیم. اندازه ی سرعت متوسط این گلوله در ثانیه ی آخر چند متر بر ثانیه است؟

پاسخ:

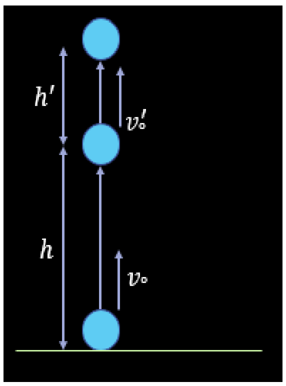
ابتدا کل زمان حرکت را بدست می آوریم:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3\ s$$

$$\Delta y = -5 \times 4 = -20\ m$$

گلوله در ۲ ثانیه ی اول ۲۰ متر پایین آمده، پس در ثانیه ی آخر ۲۵ متر پایین آمده. سرعت متوسط نیز برابر ۲۵ متر بر ثانیه خواهد شد.

نکته ۹ : هرگاه جسمی را به طرف بالا پرتاب کنیم، یک بار هنگام رفت و یک بار هنگام برگشت از یک نقطه عبور می کند. از این ویژگی در کتاب ها با عنوان (دو عبور متوالی) یاد می شود.



اگر زمان بین دو عبور متوالی را با t نشان دهیم:

$$t = t_2 - t_1 \quad (۱۲)$$

فاصله ی نقطه ی مورد نظر از نقطه ی اوج از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$h' = \frac{gt^2}{8} \quad (۱۳)$$

بزرگی سرعت جسم هنگام عبور از نقطه ی مورد نظر از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$v_\circ' = \frac{1}{2}gt \quad (۱۴)$$

مثال ۱۳

جسمی در شرایط خلأ از سطح زمین به طرف بالا پرتاب می شود. اگر زمان بین دو عبور متوالی از $\frac{5}{9}$ ارتفاع اوج ۴ ثانیه باشد، سرعت اولیه چند متر بر ثانیه است؟

پاسخ:

$$h' = \frac{gt^2}{8} \Longrightarrow h' = \frac{10\times16}{8} = 20\ m \Longrightarrow \frac{4}{9}H = 20 \Longrightarrow H = 45\ m$$

$$H = \frac{v_\circ^2}{2g} \Longrightarrow 45 = \frac{v_\circ^2}{20} \Longrightarrow v_\circ = 30\ \frac{m}{s}$$

مثال ۱۴

دو جسم از حال سکون و از ارتفاع مساوی، به فاصله ی زمانی ۱ ثانیه شروع به حرکت سقوط آزاد می کنند. چه مدت پس از رها شدن جسم اول، فاصله ی آنها از هم ۵ متر می شود.

پاسخ:

از آنجا جسم دوم ۱ ثانیه پس از جسم اول رها می شود، زمان حرکت آن ۱ ثانیه کمتر است. اگر سطح زمین را مبدأ در نظر بگیریم:

$$v_{\circ_۱} = v_{\circ_۲} = ۰$$

$$\left.\begin{array}{l} t_۲ = t_۱ - ۱ \\ y_۲ = y_۱ + ۵ \\ y_{\circ_۱} = y_{\circ_۲} \end{array}\right\} \Longrightarrow -\frac{۱}{۲}gt_۲^۲ + v_{\circ_۲}t_۲ + y_{\circ_۲} = -\frac{۱}{۲}gt_۱^۲ + v_{\circ_۱}t_۱ + y_{\circ_۱} + ۵ \Longrightarrow$$

$$-\frac{۱}{۲}gt_۱^۲ + gt_۱ - \frac{۱}{۲}g = -\frac{۱}{۲}gt_۱^۲ + ۵ \Longrightarrow t_۱ = ۱s$$

شکل دیفرانسیلی سرعت و شتاب

همانطور که در گذشته گفته شد، برای بدست آوردن سرعت لحظه ای، در رابطه ی سرعت متوسط $\bar{V} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$، بازه ی زمانی را به سمت صفر میل می دهیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \Longrightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (۱۵)$$

اگر حرکت بر روی خط راست باشد، رابطه ی برداری فوق به رابطه های ساده تر و البته نرده ای زیر تبدیل می شود:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (۱۶)$$

$$v = \frac{dy}{dt} \quad (۱۷)$$

به عبارت دیگر، **معادله ی سرعت، از مشتق گیری از معادله ی مکان نسبت به زمان بدست می آید.** در مورد شتاب نیز می توانیم همین کار را انجام دهیم:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (۱۸)$$

در حرکت بر روی خط راست می توانیم بنویسیم:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (۱۹)$$

یعنی **با مشتق گیری از معادله ی سرعت، نسبت به زمان، معادله ی شتاب بدست می آید.** پس **مشتق دوم مکان نسبت به زمان، شتاب را بدست می دهد.**

$$\vec{a} = \frac{d^۲\vec{r}}{dt^۲} \quad (۲۰)$$

$$a = \frac{d^۲x}{dt^۲} \quad (۲۱)$$

معادله ی ۲۱ را می توان برای راستای y نیز نوشت.

نکته ۱۰ : برای بدست آوردن نقطه های اکسترمم یک تابع (بیشینه و کمینه)، از تابع مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می دهیم.

مثال ۱۵

معادله ی مکان متحرکی در SI به صورت $x = \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 20t$ است. کمترین سرعتی که این متحرک در مسیر حرکت پیدا می کند چند متر بر ثانیه است؟

پاسخ:

ابتدا با مشتق گیری از معادله ی مکان، معادله ی سرعت را بدست می آوریم. از معادله ی سرعت مشتق گرفته و مساوی صفر قرار داده و زمان کمترین سرعت را محاسبه می کنیم و در معادله ی سرعت قرار می دهیم.

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t^2 - 12t + 20 \Longrightarrow a = 4t - 12 = 0 \Longrightarrow t = 3\,s \Longrightarrow v = 2 \times 9 - 12 \times 3 + 20 = 2\frac{m}{s}$$

مثال ۱۶

معادله ی مکان متحرکی در SI به صورت $x = -t^2 + 4t + 20$ است. حرکت آن از صفر تا ۸ ثانیه چگونه است؟

پاسخ:

از معادله ی فوق دو بار مشتق می گیریم و معادله های سرعت و شتاب را بدست می آوریم. آنها را تعیین علامت می کنیم و نوع حرکت را تعیین می کنیم.

$v = -2t + 4\,, a = -2$
$v = 0 \Longrightarrow t = 2\,s$

در بازه ی زمانی صفر تا ۲ ثانیه علامت سرعت مثبت و شتاب منفی است. پس حرکت کند شونده است. پس از لحظه ی ۲ ثانیه حرکت تندشونده خواهد شد.

مثال ۱۷

اگر معادله ی حرکت متحرکی که بر روی خط راست حرکت می کند به صورت $x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 6t - 2$ باشد، در چه لحظه ای بر حسب ثانیه، شتاب حرکت برابر صفر است؟

پاسخ:

$v = t^2 - 5t\,, a = 2t - 5 = 0 \Longrightarrow t = 2.5\,s$

حرکت در صفحه

منظور از حرکت در صفحه، حرکتی است که در آن هم مختصه ی X تغییر می کند و هم مختصه ی Y. در این حرکت می توانیم دو معادله ی مکان – زمان، یکی برای مختصه ی X و دیگری برای مختصه ی Y بنویسیم. این دو حرکت کاملاً مستقل از هم تعریف می شوند. یعنی مثلاً یکی می تواند حرکت یکنواخت و دیگری حرکت شتاب دار با شتاب ثابت یا حتی متغیر باشد. معادله ی مکان، در واقع تابعی از مکان های X و Y است و به صورت کلی می توان آن را به صورت رابطه ی ۲۲ نوشت:

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (۲۲)$$

معادله ی سرعت نیز تابع دو متغیر X و Y می باشد.

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \quad (۲۳)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \quad (۲۴)$$

و همچنین در مورد معادله ی شتاب:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \quad (۲۵)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v_x}}{dt}\vec{i} + \frac{d\vec{v_y}}{dt}\vec{j} \quad (۲۶)$$

$$\vec{a} = \frac{d^۲x}{dt^۲}\vec{i} + \frac{d^۲y}{dt^۲}\vec{j} \quad (۲۷)$$

بزرگی بردارهای مکان، سرعت و شتاب از رابطه ی فیثاغورس بدست می آید.

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} \quad (۲۸)$$

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} \quad (۲۹)$$

$$a = \sqrt{a_x^۲ + a_y^۲} \quad (۳۰)$$

مثال ۱۸

مختصات مکان جسمی در SI از روابط $\begin{cases} x = ۲t \\ y = ۴t^۲ \end{cases}$ بدست می آید.

الف) معادله ی مسیر جسم را بدست آورید.

ب) بردار سرعت آن را در لحظه ی $t = ۲s$ بدست آورید.

پ) بزرگی بردار سرعت جسم را در لحظه ی $t = ۲s$ بدست آورید.

ت) بردار شتاب آن را در لحظه ی $t = ۲s$ بدست آورید.

ث) بزرگی بردار شتاب را در لحظه ی $t = ۲s$ بدست آورید.

پاسخ الف :

$$x = ۲t \Rightarrow t = \frac{x}{۲}$$

$$y = ۴t^۲ \Rightarrow y = ۴\left(\frac{x}{۲}\right)^۲ \Rightarrow y = x^۲$$

پاسخ ب :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ۲\frac{m}{s}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = ۸t = ۱۶\frac{m}{s}$$
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \Longrightarrow \vec{v} = ۲\vec{i} + ۱۶\vec{j}$$

پاسخ پ :

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = ۱۶/۱۲\frac{m}{s}$$

پاسخ ت:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = ۰$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = ۸\frac{m}{s^۲}$$
$$\vec{a} = ۸\vec{j}$$

پاسخ ث:

$$a = \sqrt{a_x^۲ + a_y^۲} = ۸\frac{m}{s^۲}$$

مثال ۱۹

بردار مکان متحرکی در SI به صورت $\vec{r} = (t^2 - 2t)\vec{i} + \left(\frac{1}{3}t^3 - t^2\right)\vec{j}$ است. در لحظه ای که اندازه ی شتاب متحرک به حداقل مقدار خود می رسد، زاویه ی بین بردارهای سرعت و شتاب چند درجه می شود؟

پاسخ:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Longrightarrow \vec{a} = 2\vec{i} + (2t-2)\vec{j} \overset{t=1}{\Longrightarrow} \overrightarrow{a_{min}} = 2\vec{i}$$

کمترین مقدار شتاب مربوط به زمانی است که مؤلفه ی عمودی آن برابر صفر شود.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Longrightarrow \vec{v} = (2t-2)\vec{i} + (t^2 - 2t)\vec{j} \overset{t=1}{\Longrightarrow} \vec{v} = -\vec{j}$$

شتاب بر روی محور x و سرعت بر روی محور y است.

$$\alpha = 90^\circ$$

مثال ۲۰

دو گلوله ی A و B در صفحه ی xoy قرار دارند و مکان آنها در SI به صورت $\begin{cases} x_A = 8t - 6 \\ y_A = 3t \end{cases}$ و $\begin{cases} x_B = 18 \\ y_B = 9 \end{cases}$ است. یک ثانیه قبل از برخورد، فاصله ی دو گلوله چند متر است؟

پاسخ:

در لحظه ی برخورد مکان دو متحرک بر روی هر دو محور یکسان می باشد.

$$8t - 6 = 18 \Longrightarrow t = 3s \Longrightarrow t' = 2s \Longrightarrow \begin{cases} x_A = 10\,m \\ y_A = 6\,m \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Delta x = 8m \\ \Delta y = 3\,m \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{64+9} = \sqrt{73}\,m$$

مثال ۲۱

متحرکی در صفحه حرکت می کند و بردار مکان – زمان آن در SI به صورت $\vec{r} = 6t\,\vec{i} + (-t^2 + 8t)\vec{j}$ است. در لحظه ی ۱ ثانیه، بردار سرعت با جهت مثبت محور X زاویه ی چند درجه می سازد؟

پاسخ:

$$\vec{v} = 6\vec{i} + (-2t + 8)\vec{j} \xRightarrow{t=1} \vec{v} = 6\vec{i} + 6\vec{j} \Rightarrow \alpha = tan^{-1}\frac{y}{x} = tan^{-1}\frac{6}{6} = 45^\circ$$

مثال ۲۲

معادله ی حرکت جسمی که در صفحه حرکت می کند، در SI به صورت $\begin{cases} x = 20t^2 \\ y = -5t^3 \end{cases}$ است. بردار سرعت جسم در لحظه ی ۲ ثانیه در SI را بنویسید.

پاسخ:

$$v_x = 40\,t\,,\ v_y = -15t^2 \xRightarrow{t=2\,s} \vec{v} = 80\,\vec{i} - 60\,\vec{j}$$

مثال ۲۳

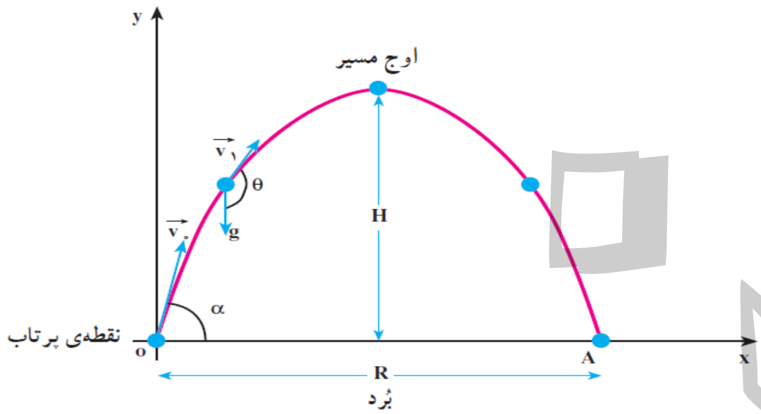
بردار مکان متحرکی در لحظه ی $t_1 = 2s$ برابر $\overrightarrow{r_1} = 4\vec{i} - \alpha\vec{j}$ و در لحظه ی $t_2 = 4s$ برابر $\overrightarrow{r_2} = \beta\vec{i} + \vec{j}$ است. اگر بردار سرعت متوسط این متحرک در بازه ی زمانی ۲ تا ۴ ثانیه برابر $\bar{\vec{V}} = \vec{i} - 5\vec{j}$ باشد، حاصل $\alpha - \beta$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\bar{\vec{V}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{i} - 5\vec{j} = \frac{(\beta-4)\vec{i} + (1+\alpha)\vec{j}}{4-2} \Rightarrow \begin{cases} \beta - 4 = 2 \\ 1 + \alpha = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 6 \\ \alpha = -11 \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta = -17$$

حرکت پرتابی در صفحه

این حرکت نوع خاصی از حرکت در صفحه است که در آن، با چشم پوشی از مقاومت هوا، حرکت در راستای x، حرکتی یکنواخت است و حرکت در راستای y حرکت سقوط آزاد. شکل روبرو، شکل مسیر حرکت پرتابی در صفحه را نشان می دهد.



در این نمودار v_0 سرعت اولیه ی پرتاب و α زاویه ی پرتاب با سطح افق و R برد حرکت پرتابی و H، ارتفاع نقطه ی اوج یا بیـ شینه ارتفاع در راستای عمودی است.

با توجه به شکل می توانیم بنویسیم:

مؤلفه ی افقی سرعت اولیه:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \quad \text{(۳۱)}$$

مؤلفه ی افقی سرعت:

$$v_x = v_{0x} \quad \text{(۳۲)}$$

اگر نقطه ی پرتاب را مبدأ مختصات در نظر بگیریم؛

معادله ی حرکت در راستای محور x:

$$x = v_0 \cos\alpha t \quad \text{(۳۳)}$$

مؤلفه ی قائم سرعت اولیه

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha \quad \text{(۳۴)}$$

معادله ی سرعت در راستای قائم

$$v_y = -gt + v_0 \sin\alpha \quad \text{(۳۵)}$$

معادله ی حرکت در راستای قائم

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t \quad \text{(۳۶)}$$

با حذف t می توانیم معادله ی مسیر را بدست آوریم:

$$x = v_0 \cos\alpha t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha \quad \text{(۳۷)}$$

a. ارتفاع نقطه ی اوج :

در بالاترین نقطه از مسیر حرکت، سرعت عمودی پرتابه برابر است با صفر، یعنی $v_y = 0$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$v_y = 0 \Rightarrow -gt + v_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad \text{(۳۸)}$$

رابطه ی ۳۸ مدت زمان رسیدن پرتابه به اوج را بدست می دهد.

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin\alpha\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) \Rightarrow H = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \quad \text{(۳۹)}$$

$$H = \frac{v_{\circ y}^{۲}}{۲g} \quad (۴۰)$$

b. برد پرتابه:

برد پرتابه، بیشینه ی فاصله ی افقی پرتابه از نقطه ی پرتاب است. در نقطه ی برد داریم: $x = R\,, y = ۰$. مدت زمان رسیدن پرتابه به برد، دو برابر مدت زمان رسیدن پرتابه به نقطه ی اوج است. یعنی:

$$t = \frac{۲v_{\circ}sin\alpha}{g} \quad (۴۱)$$

رابطه ی ۴۱، مدت زمان رسیدن پرتابه به برد پرتاب را بدست می دهد. با قرار دادن رابطه ی ۴۱ در رابطه ی ۳۳ می توانیم برد پرتابه را بدست آوریم.

$$R = v_{\circ}\cos\alpha\left(\frac{۲v_{\circ}sin\alpha}{g}\right) \Longrightarrow R = \frac{۲v_{\circ x}v_{\circ y}}{g} \quad (۴۲)$$

از آنجا که $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\ \cos\alpha$:

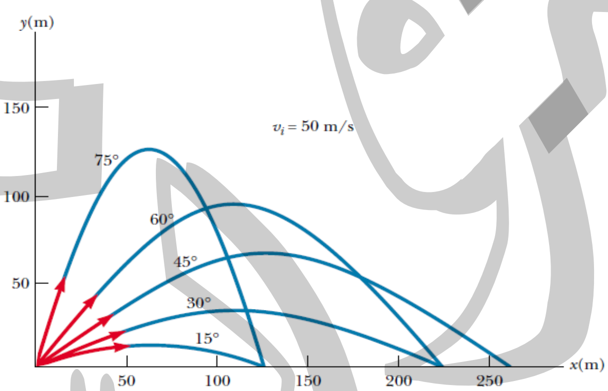
$$R = \frac{v_{\circ}^{۲}\sin ۲\alpha}{g} \quad (۴۳)$$

سرعت پرتابه را در هر لحظه می توانیم از رابطه ی ۴۴ بدست آوریم:

$$v = \sqrt{v_x^{۲} + v_y^{۲}} \quad (۴۴)$$

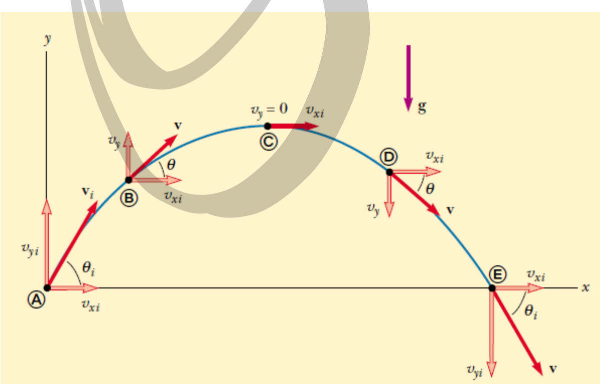
نکته ۱۱ : اگر دو پرتابه تحت زاویه هایی به مقدار یکسان، بیشتر و کمتر از ۴۵ درجه با سرعت اولیه ی یکسان پرتاب شوند، دارای برد برابر خواهند بود.

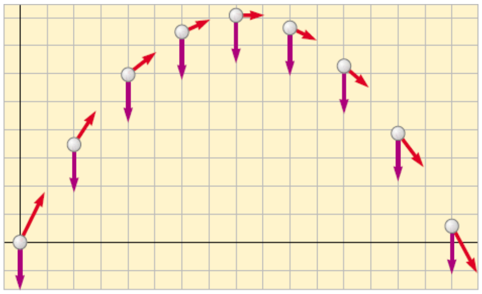
نکته ۱۲: برد پرتابه به ازای زاویه ی پرتاب ۴۵ درجه بیشینه خواهد بود. $R_{max} = \frac{v_{\circ}^2}{g}$



نکته ۱۳: مؤلفه ی عمودی سرعت، در نقطه ی اوج برابر است با صفر و در این نقطه پرتابه تنها سرعت افقی دارد.

نکته ۱۴: سرعت پرتابه در لحظه ی پرتاب، برابر است با سرعت آن هنگام فرود.





نکته ۱۵ : در طول حرکت، زاویه ی بین سرعت و شتاب کاهش می یابد.

مثال ۲۴

هواپیمایی با سرعت افقی و ثابت $۳۶۰\frac{Km}{h}$ در ارتفاع ۵۰۰ متری مستقیماً به طرف نقطه ای که شخصی در انتظار کمک است، پرواز می کند. یک بسته از چه فاصله ی افقی باید رها شود تا در نقطه ای بسیار نزدیک به شخص روی زمین بیفتد.

پاسخ:

ابتدا زمان سقوط را محاسبه می کنیم و پس از رابطه ی جابجایی افقی مسئله را حل می کنیم.

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_{۰}\sin\alpha\, t \Rightarrow -۵۰۰=-۵t^{۲}+۱۰۰\sin ۰ \Rightarrow t^{۲}=۱۰۰ \Rightarrow t=۱۰s$$

$$x=v_{۰}\cos\alpha\, t=۱۰۰\cos ۰\times ۱۰=۱۰۰۰m$$

مثال ۲۵

فوتبالیستی تحت زاویه ی ۳۷ درجه نسبت به افق، به توپی با سرعت اولیه ی ۲۰ متر بر ثانیه ضربه می زند.

الف) بعد از چه مدتی توپ به بالاترین نقطه ی مسیرش می رسد؟

ب) توپ تا چه ارتفاعی بالا می رود؟

پ) برد افق توپ چقدر است؟

پاسخ الف:

$$t=\frac{v_{۰}sin\alpha}{g}=\frac{۲۰\times ۰/۶}{۱۰}=۱/۲s$$

پاسخ ب:

$$H=\frac{(v_{۰}sin\alpha)^{۲}}{۲g}=\frac{۴۰۰\times ۰/۳۶}{۲۰}=۷/۲m$$

پاسخ پ:

$$R=\frac{v_{۰}^{۲}\sin ۲\alpha}{g}=\frac{۴۰۰\times ۰/۹۶}{۱۰}=۳۸/۴m$$

مثال ۲۶

سنگی را با سرعت اولیه ی ۲۵ متر بر ثانیه تحت زاویه ی ۴۵ درجه بالای افق پرتاب می کنیم. جابجایی های افقی و قائم آن را بعد از ۲ ثانیه بدست آورید.

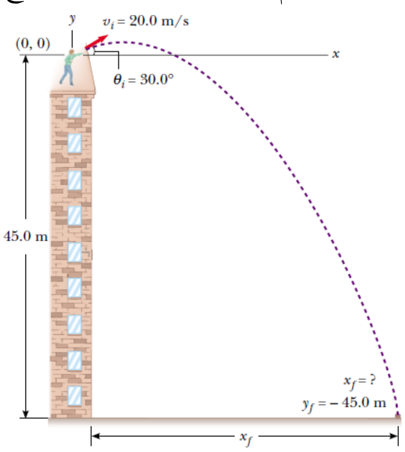
پاسخ:

$$x=v_{۰}\cos\alpha\, t=۲۵\times ۰/۷\times ۲=۳۹/۶m$$

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + v_\circ \sin\alpha\, t = -۵\times ۴ + ۲۵\times ۰/۷ \times ۲ = ۱۵/۳m$$

مثال ۲۷

از بالای ساختمانی به ارتفاع ۴۵ متر، توپی را با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه تحت زاویه ی ۳۰ درجه بالای افق پرتاب می کنیم. این توپ تا رسیدن به سطح زمین چند ثانیه در راه است؟ در راستای افق چه مسافتی را می پیماید؟

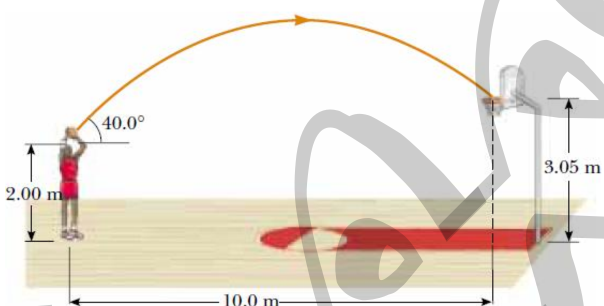


پاسخ:

$$y = -5t^2 + v_\circ \sin\alpha\ t \Rightarrow -45 = -5t^2 + 10t \Rightarrow -5t^2 + 10t + 45 = 0$$
$$\Delta = 100 + 900 = 1000$$
$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{1000}}{-10} \cong 4.16\ s$$
$$x = v_\circ \cos\alpha\, t = 20\times 0.86 \times 4.16 = 71.5\ m$$

مثال ۲۸

با توجه به شکل مقابل سرعت اولیه ی توپ چقدر باشد تا درون سبد بیفتد؟



پاسخ:

می توانیم از معادله ی مسیر استفاده کنیم.

$$y = -\frac{gx^2}{2v_\circ^2 cos^2\alpha} + xtan\alpha \Rightarrow ۳.۰۵ = -\frac{۱۰\times ۱۰۰}{۲\times v_\circ^2 \times 0.58} + 10\times 0.84 \Rightarrow$$
$$-5.35 = -\frac{1000}{1.16\, v_\circ^2} \Rightarrow v_\circ^2 = 161.1 \Rightarrow v_\circ \cong 12.7\ \frac{m}{s}$$

مثال ۲۹

گلوله ای از سطح زمین پرتاب شده و معادله ی مسیر آن در SI به صورت $y = 2x^2 - 40x$ است. برد این گلوله چند متر است؟

پاسخ:

در برد، ارتفاع صفر است.

$$2x^2 - 40x = 0 \Rightarrow 2x = 40 \Rightarrow x = 20\ m$$

مثال ۳۰

بردار سرعت اولیه ی پرتابه ای در SI به صورت $\vec{V_\circ} = 15\vec{i} + 20\vec{j}$ است. بردار جابجایی این پرتابه در ۳ ثانیه ی اول در SI چگونه است؟

پاسخ:

$$\Delta x = v_{\circ x} t = 15\times 3 = 45\ m$$

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2+v_{\circ y}t=-5\times 9+60=15\ m$$
$$\overrightarrow{\Delta r}=45\vec{i}+15\vec{j}$$

***مثال ۳۱**

جسمی به وزن ۵ نیوتن در راستایی که با افق زاویه ی ۶۰ درجه می سازد، با سرعت اولیه ی ۲۰ متر بر ثانیه به بالا پرتاب می شود. حداقل انرژی جنبشی آن در طول مسیر حرکت چند ژول است؟

پاسخ:

$$v_x=v_{\circ x}=20\times\frac{1}{2}=10\ \frac{m}{s}\ ,\ m=\frac{w}{g}=0.5\ Kg\ \Longrightarrow K=\frac{1}{2}\times 0.5\times 100=25\ \frac{m}{s}$$

مثال ۳۲

سرعت اولیه ی گلوله ای که در شرایط خلأ از سطح زمین پرتاب می شود، ۳۰ متر بر ثانیه و سرعت آن در نقطه ی اوج ۱۰ متر بر ثانیه است. ارتفاع اوج چند متر است؟

پاسخ:

سرعت در نقطه ی اوج، مؤلفه ی افقی سرعت است.

$$v_x=v_{\circ x}=10\Longrightarrow 30\ \cos\alpha=10\Longrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{3}\Longrightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{8}{9}}$$
$$H=\frac{(v_\circ sin\alpha)^2}{2g}\Longrightarrow H=\frac{\left(30\times\sqrt{\frac{8}{9}}\right)^2}{20}=\frac{900\times 8}{180}=40\ m$$

مثال ۳۳

گلوله ای را از سطح زمین در راستای قائم رو به بالا پرتاب می کنیم و گلوله تا ارتفاع ۸۰ متری بالا می رود. اگر گلوله را با همان سرعت اولیه تحت زاویه ی مناسبی پرتاب کنیم، بیشترین برد گلوله چند متر می شود؟

پاسخ:

$$H=\frac{v_\circ^2}{2g}\Longrightarrow 80=\frac{v_\circ^2}{20}\Longrightarrow v_\circ=40\ \frac{m}{s}$$
$$R_{max}=\frac{v_\circ^2}{g}=\frac{1600}{10}=160\ m$$

مثال ۳۴

در شرایط خلأ، پرتابه ای از مبدأ مختصات تحت زاویه ی α بالای افق پرتاب می شود. این پرتابه هنگام عبور از نقطه ی $M\begin{matrix}20\ m\\10\ m\end{matrix}$ کمترین بزرگی سرعت را دارد. α چند درجه است؟

پاسخ:

نقطه ی فوق، اوج پرتابه است. پس بیشینه ی ارتفاع (اوج) ۱۰ متر است. و برد پرتابه ۴۰ متر است.

$$H=\frac{v_{\circ y}^2}{2g}\Longrightarrow v_{\circ y}=v_\circ\sin\alpha=10\sqrt{2}\frac{m}{s}$$
$$R=\frac{2v_{\circ x}v_{\circ y}}{g}\Longrightarrow 40=2v_\circ\ sin\alpha\times v_\circ\ \cos\alpha\Longrightarrow v_\circ\cos\alpha=\frac{20\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow \tan\alpha=1\Longrightarrow \alpha=45$$